Energie et corrélation

Toute transmission d'information étant liée à un échange d'énergie, l'énergie d'un signal est une notion fondamentale.

A. Puissance et énergie

A.1. Un exemple très simple

Considérons une résistance R traversée par un courant i(t) et soumise à une tension u(t) :

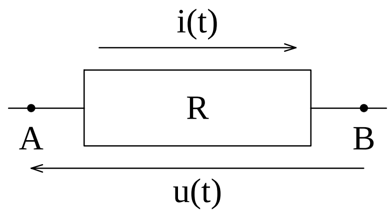

Fig. 1 : Résistance électrique en convention récepteur

La puissance dissipée dans la résistance est, avec la convention choisie sur la figure 1 :

$$p(t) = u(t)\, i(t)$$

Dans ce cas particulier, les deux grandeurs u(t) et i(t) sont reliées par la loi d'Ohm :

$$u(t) = R\, i(t)$$

Donc selon que nous considérons que le signal est l'intensité i(t) ou la tension u(t), nous pouvons exprimer la puissance instantanée sous l'une des formes suivantes :

$$p(t) = R\, i^2(t) \quad \text{ou} \quad p(t) = \frac{1}{R}\, u^2(t)$$

A.2 Puissance instantanée d'un signal

Considérons un signal x(t), qui peut être complexe. On définit la puissance instantanée de ce signal comme le module au carré du signal :

$$P_x(t) = |x(t)|^2$$

Dans la réalité il faut prendre en compte un facteur de normalisation physique (R ou 1/R dans l'exemple précédent).

A.3. Puissance d'interaction

De manière générale, on définit la puissance d'interaction de deux signaux x(t) et y(t) par :

$$P_{xy}(t) = x(t)\ y^*(t)$$

A.4. Puissance moyenne

On définit la puissance moyenne sur une durée T par :

$$P_x(t,T) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} |x(u)|^2\, du \quad \text{ou} \quad P_{Sx}(t,T) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} |x(u)|^2\, du$$

La puissance moyenne est obtenue sur une durée infinie :

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(u)|^2\, du$$

Des définitions similaires peuvent être données pour deux signaux.

A.5. Energie d'un signal

L'énergie d'un signal est définie comme l'intégrale de la puissance sur une durée finie ou infinie :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$

On définit de même l'énergie d'interaction de deux signaux.

On distingue :
- les signaux à énergie finie (par exemple les signaux transitoires) ;
- les signaux à énergie infinie ;
- les signaux à puissance moyenne finie non nulle (par exemple les signaux périodiques).

A.6. Densité spectrale d'énergie

Le théorème de Parseval nous permet d'écrire :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$$

où $X(j\omega)$ est la transformée de Fourier du signal x(t).

Si nous notons $\nu = \omega/2\pi$ la fréquence correspondant à la pulsation ω, il vient :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu$$

Nous pouvons donc calculer l'énergie d'un signal dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. De même, nous avons pour l'énergie d'interaction :

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, Y^*(\nu)\, d\nu$$

On définit la *densité spectrale d'énergie* comme la densité d'énergie par unité de fréquence, pour un signal :

$$S_x(\nu) = |X(\nu)|^2$$

Pour deux signaux nous définissons la *densité spectrale d'énergie d'interaction* :

$$S_{xy}(\nu) = X(\nu)\, Y^*(\nu)$$

Nous avons :

$$S_{yx}(\nu) = Y(\nu)\, X^*(\nu) = S_{yx}{}^*(\nu)$$

B. Corrélation

B.1. Autocorrélation

Pour un signal à énergie finie l'*autocorrélation* est définie par :

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

$C_x(\tau)$ est homogène à une énergie. $C_x(0)$ est l'énergie du signal.

Pour un signal à puissance moyenne finie l'autocorrélation, homogène à une puissance, est définie par :

$$C_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

Dans ce cas, $C_x(0)$ est la puissance moyenne du signal.

L'inégalité de Schwartz permet d'écrire :

$$|C_x(\tau)| \leq C_x(0)$$

L'autocorrélation est maximale lorsque le retard est nul. L'autocorrélation permet une comparaison entre le signal x(t) et sa copie retardée x(t-τ). La ressemblance est maximale en absence de décalage.
Nous avons :

$$C_x^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\; x(t+\tau)\; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u-\tau)\; x(u)\; du = C_x(\tau)$$

B.2. Intercorrélation

Pour deux signaux à énergie finie on définit l'*intercorrélation* par :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\; y^*(t-\tau)\; dt$$

Pour deux signaux à puissance moyenne finie l'intercorrélation est définie par :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\; y^*(t-\tau)\; dt$$

L'intercorrélation peut permettre de mesurer un décalage en temps. En effet si le signal y(t) correspond à x(t) décalé de τ_0 :

$$y(t) = x(t + \tau_0)$$

alors l'intercorrélation :

$$C_{xy}(\tau) = C_x(\tau - \tau_0)$$

est maximale pour $\tau = \tau_0$.

Nous avons :

$$C_{xy}^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\; y(t+\tau)\; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u-\tau)\; y(u)\; du = C_{yx}(\tau)$$

B.3. Relations de Wiener-Khintchine

Densités spectrales d'énergie ou de puissance sont reliées aux fonctions de corrélation. Reprenons, par exemple, la définition de l'intercorrélation de deux signaux :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\; y^*(t-\tau)\; dt$$

L'identité de Parseval nous permet de remplacer l'intégration dans le domaine temporel par une intégration du produit des transformées de Fourier dans le domaine fréquentiel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, G^*(j\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, G^*(\nu)\, d\nu$$

Notons X(ν) et Y(ν) les transformées de Fourier des signaux x(t) et y(t). Nous avons :

$$Y_\tau(\upsilon) = TF\left[y(t-\tau)\right] = Y(\nu)\, e^{-j2\pi\nu} \quad \text{et} \quad {Y_\tau}^*(\upsilon) = Y^*(\nu)\, e^{j2\pi\nu}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, Y^*(\nu)\, e^{j2\pi\nu}\, d\nu$$

C’est-à-dire que l’intercorrélation est la transformée inverse de la densité spectrale d’énergie d’interaction :

$$C_{xy}(\tau) = TF^{-1}\left[S_{xy}(\nu)\right]$$

Donc inversement, la densité spectrale d’interaction est la transformée de l’intercorrélation :

$$S_{xy}(\nu) = TF\left[C_{xy}(\tau)\right]$$

Nous avons une relation équivalente entre la densité spectrale d’énergie d’un signal et son autocorrélation :

$$S_x(\nu) = TF\left[C_x(\tau)\right]$$

$$C_x(\tau) = TF^{-1}\left[S_x(\nu)\right]$$